



MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE
DU BUDGET, DES COMPTES PUBLICS
ET DE LA FONCTION PUBLIQUE



**Direction générale de la concurrence, de la concurrence,
de la consommation et de la répression des fraudes**

Annales du concours externe de contrôleur Des 12 et 13 mars 2008

Concours à dominante technologique et scientifique

EPREUVE N° 2 : Exercices de mathématiques
durée : 3 heures - coefficient 3

Cette épreuve comporte 3 pages et se compose de 4 exercices indépendants qui doivent être *tous* traités.

L'UTILISATION D'UNE CALCULATRICE EST AUTORISÉE

N.B. Toute réponse devra être justifiée.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(0 ; 0 ; 2)$ $B(0 ; 4 ; 0)$ et $C(2 ; 0 ; 0)$.

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$ et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) .

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$ est la sphère de diamètre $[BC]$ ».

Proposition 3 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ ».

Proposition 4 : « le point H a pour coordonnées $(\frac{8}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{8}{9})$ ».

Exercice 2 (5 points)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$(z^2 + 9)(z^2 - 9z + 27) = 0.$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3i ; z_B = \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_C = \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

a) Écrire chacun des nombres complexes z_A , z_B et z_C sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.

b) Soit I le point d'affixe $z_I = 2$. Calculer les distances AI , BI et CI .

En déduire que les points A , B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3 (5 points)

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

Partie A –

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il y a six chances sur 10 qu'il choisisse la plage à l'est. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'événement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i -ème jour » et O_i l'événement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i -ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(E_1 \cap E_2)$; $p(O_1 \cap E_2)$; $p(E_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

Partie B –

On suppose maintenant que n touristes ($n > 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leq k \leq n$) partent en direction de l'Est.
2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
 - a) Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
 - b) Lorsque le groupe comprend 10 personnes, calculer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.
 - c) Quelle est, au centième près, la probabilité qu'aucun des 10 touristes ne soit heureux ?

Exercice 4 (6 points)

Dans ce problème, on se propose d'étudier la fonction f définie sur $] -2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(2x + 4) - x.$$

La courbe C représente la fonction f dans un plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Étude de la fonction

1.a) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers -2 .

Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

b) Montrer que la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$.

2.a) Déterminer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $] -2 ; +\infty[$, en indiquant la valeur exacte du maximum.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

4. Représenter T et C .

5. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et encadrer chacune de ces solutions par deux entiers consécutifs.

Partie B : Calcul d'aire

1. Hachurer sur le graphique le domaine D délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 0$.

2.a) Montrer que la fonction G définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $G(x) = (x + 2) \ln(2x + 4) - x$ est une primitive de la fonction g définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x + 4)$.

b) En déduire une primitive de la fonction f .

3. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine D en cm^2 , puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.