

Concours de contrôleur

mars 2009

Epreuve de mathématiques

Durée 3 heures.
Calculatrices autorisées

Le sujet comporte quatre exercices indépendants les uns des autres.

N.B. Toute réponse devra être justifiée.

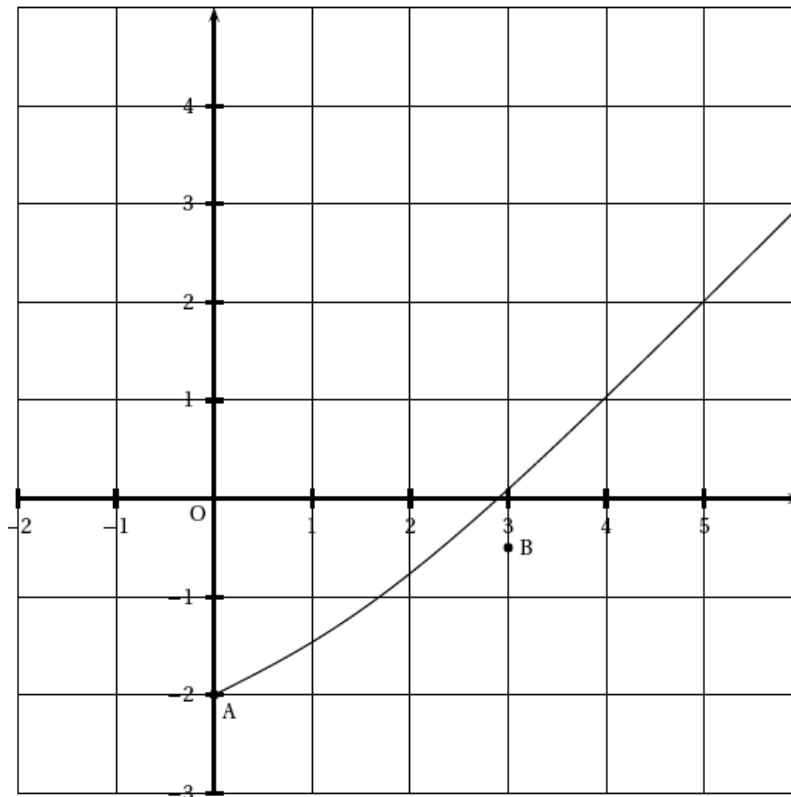
Exercice 1 (7 points)

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels \mathbf{R} par : $f(x) = x - 3 + \frac{2}{e^x + 1}$.

Partie A

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f .

Sur la figure ci-dessous, on a représenté une partie de \mathcal{C} pour les valeurs de x positives.



Cette courbe passe par le point $A(0 ; -2)$. On note B le point de coordonnées $(3 ; -0,5)$.

Les questions 1 à 3 doivent être traitées par lecture graphique avec la précision permise par le graphique. La démarche suivie devra être détaillée sur la copie.

1. Donner la valeur de $f(0)$.
2. Donner un encadrement d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ d'amplitude 0,25.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 1$ dans $[0 ; +\infty[$.

Partie B

- 1.a) Calculer $f(0)$.
- b) Montrer que le point A est centre de symétrie de \mathcal{C} .
- 2.a) Calculer $f'(x)$.
- b) Montrer que la droite (AB) est la tangente à \mathcal{C} au point A .
- c) Donner l'équation réduite de cette tangente à \mathcal{C} au point A .
3. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de f sur \mathbf{R} .
- 4.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) Déterminer les équations des deux asymptotes obliques à \mathcal{C} .
5. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbf{R} .

Exercice 2 (5 points)

Les 224 candidats d'un concours doivent traiter un exercice de probabilités.

Pour organiser les données, ils disposent de deux méthodes : un tableau ou un schéma.

Trois quarts d'entre eux utilisent un tableau et parmi ceux-ci 12,5 % ont fait une erreur. Tous les autres ont fait un schéma et 7 d'entre eux ont fait une erreur.

1. Reproduire en le complétant le tableau ci-dessous afin de faire la synthèse de ces données :

bilan \ choix	schéma	schéma	schéma
avec erreur		7	
sans erreur			
total			224

2. On choisit un candidat de ce concours au hasard.

On note T l'événement : « le candidat a utilisé un tableau » et on note E l'événement : « le candidat a fait une erreur » ; \bar{T} et \bar{E} désignent les événements contraires respectifs de T et E .

a) Exprimer \bar{T} à l'aide d'une phrase affirmative (sans négation).

b) Exprimer par une phrase les événements suivants : $T \cap E$, $T \cup E$, $T \cap \bar{E}$ et $\bar{T} \cap \bar{E}$.

c) Calculer la probabilité des quatre événements de la question b. (on donnera les résultats sous forme d'une fraction irréductible).

3. Les événements T et E sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (4 points)

Une société d'achat en ligne veut analyser le déroulement d'une vente promotionnelle "flash" qu'elle a organisée sur l'Internet. Cette vente, d'une durée de 3 minutes, a provoqué sur son site un flux financier que l'on suppose continu et dont la vitesse instantanée a été variable en fonction du temps. On a pu modéliser cette vitesse pendant les trois minutes de l'ouverture du site par la

fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(t) = 20te^{-\frac{t^2}{2}}$ où t est le temps en minutes et $f(t)$ est exprimée en milliers d'euros à la minute.

1. Justifier que f est positive sur $[0 ; 3]$.

2. Vérifier que la fonction F définie sur $[0 ; 3]$ par $F(t) = -20e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une primitive de f sur $[0 ; 3]$.

3. En déduire l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 3$, exprimée en unités d'aire.

4. Quelle est la valeur moyenne de f sur $[0 ; 3]$?

5. Quelle a été la somme totale transférée à la fin des trois minutes (à un euro près) ?

Exercice 4 (4 points)

Pour financer l'achat de sa maison, un particulier emprunte un capital C à sa banque à un taux fixe t .

Chaque mois il remboursera une mensualité fixe m sur une durée de N mois.

La mensualité m remboursée le n -ième mois ($1 \leq n \leq N$) se compose de deux parties :

- le remboursement d'une partie du capital notée C_n ;
- le paiement des intérêts notés I_n calculés pour une durée de 1 mois au taux de $\frac{t}{12}$ à partir du capital restant dû au début de ce n -ième mois.

On notera R_n le capital restant dû à la fin du n -ième mois ($R_0 = C$).

1.a) Justifier que $I_{n+1} = \frac{t}{12} R_n$.

b) En déduire que $C_{n+1} = m - \frac{t}{12} R_n$ et que $R_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{12}\right) R_n - m$.

c) Prouver que $C_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{12}\right) C_n$.

2.a) Préciser la nature de la suite (C_n) .

b) On admet que $C_1 = m - \frac{t}{12} C$.

Calculer $C_1 + C_2 + \dots + C_N$ en fonction de m , de t , de C et de N .

3. Le remboursement s'arrête quand la somme des remboursements mensuels est égale au capital emprunté.

$$\text{Montrer que } m = C \times \frac{t}{12} \times \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{12}\right)^N - 1}\right).$$

Eléments de correction

Exercice 1 (7 points)

Partie A

- $f(0)$ est l'ordonnée à l'origine du point de \mathcal{C} d'abscisse 0 : $f(x) = -2$. (0,5 pt)
- La solution α de l'équation $f(x) = 0$ est l'abscisse du point de \mathcal{C} d'ordonnée 0 : $2,75 < \alpha < 3$. (0,5 pt)
- Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 1$ sont les abscisses des points de \mathcal{C} situés au-dessus de la droite d'équation $y = 1$ ou sur cette droite : avec la précision permise par le dessin, on a $S = [4 ; +\infty[$. (1 pt)

Partie B

1.a) $f(0) = 0 - 3 + \frac{2}{e^0 + 1}$ avec $e^0 = 1$ donc $f(0) = -2$. (0,5 pt)

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= x - 3 + \frac{2}{e^x + 1} + (-x) - 3 + \frac{2}{e^{-x} + 1} \times \frac{e^x}{e^x} \\ &= -6 + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = -6 + 2 = -4 = 2f(0). \end{aligned}$$

Le point $A(0 ; f(0))$ est centre de symétrie de \mathcal{C} . (0,5 pt)

2.a) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$. (0,5 pt)

b) La tangente à \mathcal{C} au point A est la droite qui passe par A et de coefficient directeur $f'(0)$.

Or, on a $f'(0) = \frac{e^0 + 1}{(e^0 + 1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

et le coefficient directeur de (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-0,5 - (-2)}{3 - 0} = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$.

La tangente à \mathcal{C} au point A est la droite (AB) . (0,5 pt)

c) Une équation de cette tangente à \mathcal{C} au point A est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = 0,5x - 2$. (0,5 pt)

3. Comme e^x est toujours strictement positif ainsi que le carré $(e^x + 1)^2$, $f'(x)$ est strictement positif pour tout réel x . **La fonction f est strictement croissante sur \mathbf{R} .** (0,5 pt)

4.a) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = +\infty$. **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.** (0,5 pt)

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 = -\infty$. **$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.** (0,5 pt)

b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$ donc **la droite (d) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.** (0,25 pt)

De plus, la courbe \mathcal{C} est symétrique par rapport à A . La droite symétrique de (d) par rapport au point A est **la droite d'équation $y = x - 1$, qui est donc une asymptote oblique à \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$.** (0,25 pt)

5. f est strictement croissante sur \mathbf{R} avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

f réalise une bijection de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbf{R} . (0,5 pt)

Exercice 2 (5 points)

1.

bilan \ choix	tableau	schéma	total
avec erreur	21	7	28
sans erreur	147	49	196
total	168	56	224

(1 pt)

2. a) On a : \bar{T} « le candidat a utilisé un schéma ». (0,5 pt)

b) On a aussi :

$T \cap E$: « le candidat a utilisé un tableau et il a fait une erreur » ;

$T \cup E$: « le candidat a utilisé un tableau ou il a fait une erreur » ;

$T \cap \bar{E}$: « le candidat a utilisé un tableau et il n'a pas fait d'erreur » ;

$\bar{T} \cap \bar{E}$: « le candidat a utilisé un schéma et il n'a pas fait d'erreur ». (4 × 0,25 pt)

c) Choisisant un candidat au hasard, il y a équiprobabilité.

• Parmi les 224 candidats, seuls 21 ont utilisé un tableau et commis une erreur.

$$p(T \cap E) = \frac{21}{224} = \frac{7 \times 3}{7 \times 32} = \frac{3}{32}. \text{ (0,5 pt)}$$

• $p(T \cup E) = p(T) + p(E) - p(T \cap E) = \frac{168}{224} + \frac{28}{224} - \frac{21}{224} = \frac{175}{224} = \frac{7 \times 25}{7 \times 32} = \frac{25}{32}$. (0,5 pt)

• Parmi les 224 candidats, 147 ont utilisé un tableau et n'ont pas commis d'erreur.

$$p(T \cap \bar{E}) = \frac{147}{224} = \frac{7 \times 21}{7 \times 32} = \frac{21}{32}. \text{ (0,25 pt)}$$

• Parmi les 224 candidats, 49 ont utilisé un schéma et n'ont pas commis d'erreur.

$$p(\bar{T} \cap \bar{E}) = \frac{49}{224} = \frac{7 \times 7}{7 \times 32} = \frac{7}{32}. \text{ (0,25 pt)}$$

3. On a $p(T) \times p(E) = \frac{168}{224} \times \frac{28}{224} = \frac{3 \times 56}{4 \times 56} \times \frac{28}{8 \times 28} = \frac{3}{32} = p(T \cap E)$.

Les événements T et E sont indépendants. (1 pt)

Exercice 3 (4 points)

1. Sur $[0 ; 3]$, on a $t \geq 0$ et une exponentielle est toujours positive; produit de deux fonctions positives, f est positive sur $[0 ; 3]$. (0,5 pt)

2. Sur $[0 ; 3]$, la fonction F est dérivable : on utilise $(e^u)' = u'e^u$ avec $u(t) = -\frac{t^2}{2}$ et $u'(t) = -\frac{2t}{2} = -t$.

On a donc $F'(t) = -20 \times (-t) e^{-\frac{t^2}{2}} = 20t e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$. F est une primitive de f sur $[0 ; 3]$. (1 pt)

3. L'aire recherchée est donnée par $I = \int_0^3 f(t) dt = F(3) - F(0) = -20 e^{-\frac{9}{2}} - (-20e^0)$

$$\text{donc } I = 20 \left(1 - e^{-\frac{9}{2}} \right). \text{ (1 pt)}$$

4. La valeur moyenne de f sur $[0 ; 3]$ est : $m = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{3} I$, $m = \frac{20}{3} \left(1 - e^{-\frac{9}{2}} \right)$. (0,5 pt)

5. La somme totale transférée à la fin des trois minutes est la valeur moyenne m multipliée par le temps total soit $3m$.

La somme totale transférée est $3 \times \frac{20}{3} \left(1 - e^{-\frac{9}{2}} \right)$ milliers d'euros soit **19 778 euros** à un euro près.

(1 pt)

Exercice 4 (4 points)

1.a) A la fin du n -ième mois, donc au début du $(n + 1)$ -ième, il reste R_n de capital à rembourser.

Les intérêts payés le $(n + 1)$ -ième mois sont bien $I_{n+1} = \frac{t}{12} R_n$. (0,5 pt)

b) Comme, chaque mois, la mensualité fixe est égale à la somme des intérêts de ce mois et de la partie de capital remboursée, on a :

$$m = C_{n+1} + I_{n+1} \text{ d'où } C_{n+1} = m - I_{n+1} = m - \frac{t}{12} R_n. \text{ (0,5 pt)}$$

Le capital restant à rembourser à la fin du $(n + 1)$ -ième mois est la différence entre le capital restant à rembourser à la fin du n -ième mois et le capital remboursé pendant ce $(n + 1)$ -ième mois.

$$\text{On a donc : } R_{n+1} = R_n - C_{n+1} = R_n - \left(m - \frac{t}{12} R_n \right) = \left(1 + \frac{t}{12} \right) R_n - m. \text{ (0,5 pt)}$$

c) D'après 1.b), on a aussi :

$$\begin{aligned} C_{n+2} &= m - \frac{t}{12} R_{n+1} \\ &= m - \frac{t}{12} \left(R_n - \left(m - \frac{t}{12} R_n \right) \right) \\ &= m + \frac{t}{12} m - \frac{t}{12} \left(1 + \frac{t}{12} \right) R_n \\ &= \left(1 + \frac{t}{12} \right) \left(m - \frac{t}{12} R_n \right) \\ &= \left(1 + \frac{t}{12} \right) C_{n+1}. \end{aligned}$$

En changeant d'indice, on a bien $C_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{12} \right) C_n$. (0,5 pt)

2.a) La suite (C_n) est donc **une suite géométrique** de raison $\left(1 + \frac{t}{12} \right)$. (0,5 pt)

b) $S = C_1 + C_2 + \dots + C_N$ est la somme des termes d'une suite géométrique.

$$S = C_1 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{12} \right)^N}{1 - \left(1 + \frac{t}{12} \right)} = C_1 \times \frac{\left(1 + \frac{t}{12} \right)^N - 1}{\frac{t}{12}} = \frac{12}{t} \left(m - \frac{t}{12} C \right) \left(\left(1 + \frac{t}{12} \right)^N - 1 \right)$$

$$C_1 + C_2 + \dots + C_N = \left(\frac{12m}{t} - C \right) \left(\left(1 + \frac{t}{12} \right)^N - 1 \right) \text{ (0,5 pt)}$$

3. On veut $C_1 + C_2 + \dots + C_N = C$ soit $\left(\frac{12m}{t} - C\right)\left(\left(1 + \frac{t}{12}\right)^N - 1\right) = C$.

Ce qui donne successivement :

$$\frac{12m}{t}\left(\left(1 + \frac{t}{12}\right)^N - 1\right) - C\left(\left(1 + \frac{t}{12}\right)^N - 1\right) = C;$$

$$\frac{12m}{t}\left(\left(1 + \frac{t}{12}\right)^N - 1\right) = C\left(1 + \frac{t}{12}\right)^N.$$

$$m = C \times \frac{t}{12} \times \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{12}\right)^N - 1}\right). \text{ (1 pt)}$$