



Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE
DU BUDGET, DES COMPTES PUBLICS
ET DE LA FONCTION PUBLIQUE

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS SUPÉRIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2009

ÉPREUVE ÉCRITE n°2
du mardi 24 février 2009

MATHÉMATIQUES

(Durée : 3 heures – coefficient : 2)

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel informatique est interdit pendant cette épreuve. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

TOUTE NOTE INFÉRIEURE À 6 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE.

Premier exercice

Soit P la fonction polynôme définie pour tout x réel par :

$$P(x) = x^2 - 2x - 2$$

1°/

- a) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
- b) En déduire le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x . On fera un tableau de signes.

Soit f la fonction définie pour tout x réel par :

$$f(x) = (x^3 + x^2) e^{-x}.$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

2°/ Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. En déduire que \mathcal{C} possède une asymptote.

3°/ Montrer que $f'(x) = g(x) e^{-x}$ où g est une fonction que l'on déterminera à l'aide de P .

4°/ En déduire le tableau de variations de f .

5°/ Donner les équations des tangentes à la courbe \mathcal{C} aux points d'abscisses 0 et -1 .

6° / Construire \mathcal{C} ainsi que ses tangentes remarquables dans un repère orthogonal d'unités : 2 cm sur (Ox) et 4cm sur (Oy) .

Note : on prendra $e \approx 2,7$; $\sqrt{3} \approx 1,7$; $f(1-\sqrt{3}) \approx 0,3$; $f(1+\sqrt{3}) \approx 1,8$; $f(5) \approx 1$.

Deuxième exercice

1°/ Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$

2°/ Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle:

$$y'' + y' + y = x^2 \sin x$$

On donnera le détail des calculs.

Troisième exercice

Une entreprise, qui fabrique de la margarine conditionnée dans des paquets de 500 grammes, comporte deux unités de production : unité A et unité B .

On vérifie régulièrement la qualité en contrôlant le poids net et la composition des paquets choisis au hasard dans la production. Après une étude menée sur plusieurs semaines, on admet que :

- 85% des paquets de margarine issus de l'unité A répondent aux exigences de qualité
- 80% des paquets de margarine issus de l'unité B répondent aux exigences de qualité
- 82% des paquets de margarine issus de l'ensemble de la production (unité A ou unité B) répondent aux exigences de qualité.

On choisit un paquet au hasard dans la production:

On note R l'événement : " le paquet répond aux exigences de qualité"

On note A l'événement : " le paquet est issu de l'unité A "

1°/ Traduire les données de l'énoncé en langage probabiliste.

2°/ Les événements R et A sont-ils indépendants ? Justifier.

3°/ On appelle x la probabilité de l'événement A : on pose $x = P(A)$.

Exprimer $P(\bar{A})$, $P(R \cap A)$ et $P(R \cap \bar{A})$ en fonction de x .

4°/ En déduire l'expression de $P(R)$ en fonction de x .

5°/ Déterminer la valeur de x .

Quatrième exercice

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1°/ Déterminer le module et un argument des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i \quad \text{puis de} \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2°/ En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

3°/ a) Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, l'équation d'inconnue X :

$$\cos X = \frac{1}{2}$$

b) En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation d'inconnue x :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$$

Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.