Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DES FINANCES
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE
DU BUDGET, DES COMPTES PUBLICS
ET DE LA FONCTION PUBLIQUE

CONCOURS INTERNE
POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS SUPERIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2008

EPREUVE ECRITE n°2 du mardi 05 février 2008

MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures – coefficient : 2)

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel informatique est interdit pendant cette épreuve. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

TOUTE NOTE INFERIEURE A 6 SUR 20 EST ELIMINATOIRE.

Premier exercice

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 - (3+3i)z^2 + 6iz - 14 + 14i$$

1°/ Calculer $P(-1-i)$.

2°/ Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z+1+i)(az^2 + bz + c)$$

3°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -i$. Pour chaque solution, on donnera la forme algébrique et la forme trigonométrique.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$\text{(E)} \qquad z^3 - (3+3i)z^2 + 6iz - 14 + 14i = 0$$

4°/ Déterminer, sous la forme algébrique, toutes les solutions complexes de l'équation (E).

Deuxième exercice

1°/ Déterminer les réels a et b tels que $\forall x > 1 \quad \frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$

En déduire une primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x(1-x)}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$

2°/ On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad x(x-1)\,y' + y = x + 2$$

Déterminer les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
Indiquer la méthode utilisée et détailler les calculs faits.

3°/ Existe-t-il une solution de (E) définie sur $]0, +\infty[$? Justifier.

Troisième exercice

Une somme S est placée à intérêts composés au taux de 10% l'an avec capitalisation annuelle. Cela signifie que :

- le placement rapporte 10% d'intérêts par an,
- les intérêts sont placés avec le capital à la fin de chaque année afin de produire eux-mêmes des intérêts.

On désigne par C_n le capital obtenu à la fin de la n-ième année. On convient que $C_0 = S$

1°/ Montrer que $C_1 = 1{,}1\ C_0$.

2°/ Exprimer, pour $n \geq 1, C_n$ en fonction de C_{n-1}. Quelle est la nature de la suite $(C_n)_{n \in N}$?

3°/ Exprimer C_n en fonction de S et de n. Au bout de combien d'années, le capital aura-t-il doublé ?

4°/ Pendant 10 années consécutives, une personne place 100 euros le 1^er^ janvier sur son compte épargne rémunéré à intérêts composés, au taux de 10% l'an, avec capitalisation annuelle. Quel sera le capital obtenu à la fin de la dixième année ?

Note : dans cet exercice, on pourra utiliser les valeurs approchées suivantes:

$$\ln(2) \approx 0{,}7 \qquad \ln(1{,}1) \approx 0{,}1 \qquad 1{,}1^{10} \approx 2{,}594 \qquad 1{,}1^{11} \approx 2{,}853$$

Quatrième exercice

Lors de naissance de jumeaux, on note p la probabilité qu'il s'agisse de vrais jumeaux.

On admet que :

- Deux vrais jumeaux ont toujours le même sexe et la probabilité qu'ils soient d'un sexe déterminé est $\frac{1}{2}$.
- Pour deux faux jumeaux, chacun d'eux a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être un garçon ou une fille, indépendamment du sexe de l'autre.

1°/ Sachant que deux bébés jumeaux sont des faux jumeaux, quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux des garçons ?

Au cours d'une naissance de jumeaux, on considère les événements :

$A =$ " 2 garçons" , $B =$ " 2 filles" , $C =$ " 1 garçon et une fille "

2°/ a) Calculer en fonction de p les probabilités $P(A), P(B)$.

b) Montrer que $P(C) = \dfrac{1-p}{2}$.

On justifiera les résultats obtenus.

3°/ Soit n un entier naturel non nul. On observe la naissance de n paires de jumeaux et on note Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de paires de vrais jumeaux observés.

a) Quelle est la loi de Y ? Donner ses paramètres en fonction de n et de p.
Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Déterminer $P(Y = k)$ en fonction de n, k et p.

b) Exprimer en fonction de n de p le nombre moyen attendu de paires de vrais jumeaux.