Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DES FINANCES
ET DE L'INDUSTRIE

SG
Ressources humaines

MINISTÈRE DU BUDGET
DES COMPTES PUBLICS, DE LA FONCTION PUBLIQUE
ET DE LA RÉFORME DE L'ÉTAT

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS SUPÉRIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2011

❖❖❖

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ DU 22 FÉVRIER 2011

❖❖❖

MATHÉMATIQUES

❖❖❖

(Durée : 3 heures - Coefficient : 2)

❖❖❖

L'USAGE DE CALCULATRICES, DE RÈGLES À CALCUL, DE TABLES DE LOGARITHMES ET DE TOUT DOCUMENT AUTRE QUE CEUX DISTRIBUÉS PAR LES SURVEILLANTS EST STRICTEMENT INTERDIT.

REMARQUES IMPORTANTES :

- les copies doivent être rigoureusement anonymes et ne comporter aucun signe distinctif ni signature, même fictive, sous peine de nullité.
- le candidat s'assurera, à l'aide de la pagination, qu'il détient un sujet complet.

TOUTE NOTE INFÉRIEURE À 6 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE

Premier problème

Partie A

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (x+1)e^{-x}$$

1°/ Calculer $h(0)$ et les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$

2°/ Calculer la dérivée de h. En déduire le tableau de variations de h sur $]-\infty, +\infty[$.

3°/ En déduire, selon les valeurs de x, le signe de $1-(x+1)e^{-x}$.

Partie B

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2) + (x+2)e^{-x}$$

1°/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2°/ Calculer la dérivée de f. En déduire les variations de f.

3°/ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité : 2cm).

a) Monter que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à son asymptote.

b) Déterminer les coordonnées du point A intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe $x'Ox$ et l'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en A.

c) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une tangente parallèle à $(\mathcal{D})$ en un point B dont on déterminera les coordonnées.

d) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ après avoir construit les tangentes en A et B.

4°/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Note : on pourra utiliser les valeurs approchées suivantes : $e \approx 2{,}7$ $\quad e^2 \approx 7{,}4$

De plus, on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Deuxième problème

On admet que le tiers d'une population a été vaccinée contre une maladie. Suite à une épidémie, une enquête a montré que :

- sur 15 malades, il y a 2 personnes vaccinées
- sur 100 personnes vaccinées, 8 sont malades

On choisit au hasard une personne dans la population. On désigne par :

M l'événement : « la personne est malade »

V l'événement « la personne est vaccinée»

1°/ Déterminer $P(\overline{V})$ où $\overline{V}$ est l'évènement contraire de V.

2° / On désigne par $P(M|V)$ la probabilité conditionnelle de M sachant V. Exprimer $P(M|V)$ et $P(V|M)$ en fonction de $P(M \cap V)$. En déduire $P(M \cap V)$ et $P(M)$.

3° / Déterminer $P(M \cap \overline{V})$.

4° / Quelle est la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée ?

5°/ Le vaccin est-il efficace ? Justifier à l'aide des calculs précédents.

On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

Troisième problème

On considère l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 2y = 0$$

1°/ Montrer que si f_1 et f_2 sont deux solutions de (E_0) alors $f_1 + f_2$ est solution de (E_0).

2°/ Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de (E_0).

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2y = \sin 2x$$

3°/ Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $x \to A\cos 2x + B\sin 2x$

4°/ En déduire toutes les solutions de (E).