



Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE DU BUDGET, DES COMPTES
PUBLICS, DE LA FONCTION PUBLIQUE
ET DE LA RÉFORME DE L'ÉTAT

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS SUPÉRIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2010

ÉPREUVE ÉCRITE n°2

du mardi 9 mars 2010

MATHÉMATIQUES

(Durée : 3 heures – coefficient : 2)

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel informatique est strictement interdit pendant cette épreuve. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

REMARQUES IMPORTANTES :

- Les copies doivent être rigoureusement anonymes et ne comporter aucun signe distinctif ni signature, même fictive, sous peine de nullité.
- Le candidat s'assurera, à l'aide de la pagination, qu'il détient un sujet complet.

TOUTE NOTE INFÉRIEURE À 6 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE.

Premier problème

Partie A

Soit f la fonction définie de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - x \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

1°/ Calculer $f(0)$ et $f(2\pi)$.

2°/ Calculer la dérivée de f . En déduire le tableau de variations lorsque x varie de 0 à 2π .

3°/ En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et la résolution sur $[0, 2\pi]$ de l'équation $f(x) = 0$.

Partie B

On se propose de résoudre, sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, l'équation (E):

$$(E) \quad x(1 - \cos x) - 2(x - \sin x) = 0$$

1°/ Montrer que l'équation (E) peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left[A \sin\left(\frac{x}{2}\right) + Bx \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]$$

Où A et B sont deux réels que l'on déterminera.

Indication : on pourra utiliser les relations suivantes :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

2°/ En déduire les solutions (E) sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Partie C

Une feuille de tôle rectangulaire a pour largeur a . Elle est cintrée de telle façon à former une gouttière constituant une partie de surface cylindrique de rayon R et d'angle au centre x , l'angle x étant exprimé en radians (fig. 1). On supposera que $0 < x \leq 2\pi$.

On appelle $S(x)$ l'aire de section droite de la gouttière (zone hachurée sur la fig. 1).

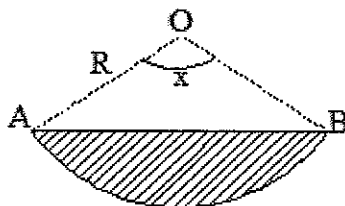


Figure 1

1°/ Montrer que $S(x) = \frac{1}{2} R^2 (x - \sin x)$ et justifier la relation $a = R x$. En déduire l'expression de $S(x)$ en fonction de a et de x .

2°/ Calculer $S'(x)$. En déduire les variations de la fonction S sur $]0, 2\pi]$.

3°/ Pour quelle valeur de x la fonction S admet-elle un maximum ? Préciser ce maximum en fonction de a .

Deuxième problème

Deux organismes concurrents et indépendants M_1 et M_2 publient chaque jour des prévisions météorologiques. Pour simplifier, on admettra que, pendant le mois de mai, il n'existe que deux prévisions possibles : « il va pleuvoir » ou « il va faire beau ».

Un jour du mois de mai, quand il va pleuvoir, chaque organisme annonce la pluie huit fois sur dix. Quand il va pleuvoir, M_1 et M_2 annoncent simultanément le beau temps une fois sur 25. Quand il va faire beau, chaque organisme annonce le beau temps neuf fois sur dix. De plus, on admet qu'en mai, il pleut deux jours sur cinq.

On considère une journée du mois de mai et on désigne par :

A l'événement : « il va pleuvoir » ,

B_1 l'événement « M_1 annonce qu'il va faire beau » ,

B_2 l'événement « M_2 annonce qu'il va faire beau » .

On admettra que les événements B_1 et B_2 sont indépendants

1°/ Traduire l'énoncé à l'aide de probabilités et de probabilités conditionnelles.

2° / Calculer la probabilité de B_1 puis la probabilité de B_2 .

3° / Calculer la probabilité de l'événement C : « M_1 et M_2 annoncent qu'il va faire beau » .

4° / Sachant que le 13 mai, les organismes M_1 et M_2 annoncent qu'il va faire beau, calculer la probabilité pour qu'il pleuve.

On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

Troisième problème

Soit le nombre complexe $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. On rappelle que $i^2 = -1$.

1°/ Calculer z^2 . Donner z^2 sous la forme $a + ib$ (a et b étant des réels).

2° / Déterminer le module et un argument de z^2 .

3°/ En déduire le module et un argument de z .

4°/ En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.