



Liberté • Égalité • Fraternité

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE  
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE  
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE DU BUDGET, DES COMPTES  
PUBLICS, DE LA FONCTION PUBLIQUE  
ET DE LA RÉFORME DE L'ÉTAT

# CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS SUPÉRIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2010

ÉPREUVE ÉCRITE n°2  
du mardi 9 mars 2010

**MATHÉMATIQUES**

**(Durée : 3 heures – coefficient : 2)**

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel informatique est strictement interdit pendant cette épreuve. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

**REMARQUES IMPORTANTES :**

- Les copies doivent être rigoureusement anonymes et ne comporter aucun signe distinctif ni signature, même fictive, sous peine de nullité.
- Le candidat s'assurera, à l'aide de la pagination, qu'il détient un sujet complet.

TOUTE NOTE INFÉRIEURE À 6 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE.

## Premier problème

Soit  $f$  la fonction définie de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x - \ln x$$

$\ln x$  désigne le logarithme népérien de  $x$ .

1°/ Calculer  $f(1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2°/ Etudier les variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ . En déduire le signe de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

On définit alors la fonction  $g$  par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

3°/ Montrer que  $g$  est définie et continue sur  $[0, +\infty[$ . Etudier les variations de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .

4°/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x}$ . Que peut-on en déduire pour la fonction  $g$  ?

5°/ Déterminer le signe de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthogonal  $\mathcal{R}$  d'unités : 2 cm sur  $(Ox)$  et 4cm sur  $(Oy)$ .

6°/ Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x = 1$ .

7°/ Construire  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

8°/ Pour tout réel  $a$  supérieur à 1, on pose  $G(a) = \int_1^a g(x) dx$ .

a) Montrer que  $G(a)$  existe pour tout  $a$  supérieur à 1

b) Calculer  $\int_1^a \frac{\ln x}{x} dx$

c) En déduire  $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a)$ .

On pourra utiliser dans ce problème les valeurs approchées suivantes:

$$e \approx 2,7 \quad ; \quad \frac{1}{e-1} \approx 0,6$$

## Deuxième problème

Un questionnaire à choix multiples propose, pour chaque question posée, 5 réponses différentes dont une seule est exacte.

### Partie A

Dans cette partie, on désigne par  $p$  la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. On a  $0 \leq p \leq 1$ . Si l'étudiant connaît la réponse, il donne évidemment la (bonne) réponse. Si l'étudiant ignore la réponse à la question posée, il choisit alors au hasard la réponse parmi les 5 proposées, les choix étant supposés équiprobables.

Soit  $B$  l'événement : « l'étudiant donne la bonne réponse », et  $C$  l'événement : « l'étudiant connaît la bonne réponse ». On désigne par  $\bar{C}$  l'événement contraire de  $C$ .

$P(B|C)$  désigne la probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $C$ .

1°/ Déterminer  $P(B|C)$  et  $P(B|\bar{C})$ . Calculer en fonction de  $p$  :  $P(\bar{C})$  et  $P(B)$ .

2°/ Quelle est la probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse lorsqu'il la donne ? Justifier. On exprimera cette probabilité à l'aide de  $p$ .

3°/ Etudier, selon les valeurs de  $p$ , les variations de la probabilité obtenue à la question précédente. Montrer que celle-ci est supérieure ou égale à  $p$ .

### Partie B

Dans cette partie, on considère un questionnaire à choix multiples comprenant 20 questions. On rappelle que 5 réponses différentes sont proposées pour chaque question, et que parmi les 5 réponses, une seule est exacte. Un étudiant répond au hasard à chacune de ces 20 questions. On admet que, pour toute question, chacune des 5 réponses proposées a la même probabilité d'être choisie. On admet également que, sur l'ensemble du questionnaire, les choix de réponses de l'étudiant sont indépendants.

1°/ Quelle est la probabilité que les 20 réponses choisies par l'étudiant soient fausses ?

2° / Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses données par l'étudiant après avoir rempli le questionnaire. Quelle est la loi de  $X$ ? Donner son espérance et sa variance.

3°/ Soit  $k$  un entier compris entre 0 et 20. Quelle est la probabilité que l'étudiant réponde correctement à  $k$  questions ?

Chaque questionnaire est évalué de la façon suivante :

- une réponse correcte à une question donne un bonus de 1 point
- une réponse fautive à une question entraîne une pénalité de  $\frac{1}{4}$  de point

On admet ainsi que le score obtenu par un étudiant est compris entre -5 et 20.

Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au score obtenu par l'étudiant qui répond au hasard aux 20 questions.

4°/ Exprimer  $Y$  à l'aide de  $X$ . Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $Y$ . Conclure.

### Troisième problème

$\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes. On rappelle que  $i^2 = -1$ .

1° / Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - z + 1 = 0$ .

2° / Soient  $z_1$  et  $z_2$  les solutions,  $z_1$  étant la solution dont la partie imaginaire est positive. Déterminer le module et un argument de  $z_1$  puis de  $z_2$ . Calculer  $z_1^3$  et  $z_2^3$ .

3° / Calculer les modules et arguments de  $(1+z_1)$ , de  $(1+z_2)$  et de  $(z_1-z_2)$ .

Si  $z = x + iy$ , on dit que le point M a pour affixe  $z$  si M a pour coordonnées  $(x, y)$  relativement à un repère orthonormé  $\mathcal{R}$  du plan (unités 4 cm sur  $(Ox)$  et  $(Oy)$ ).

4° / Soit  $M_1, M_2, M_3$  les points d'affixes respectives  $z_1, z_2$  et  $-1$ .

- Construire les points  $M_1, M_2, M_3$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .
- Quelle est la nature du triangle  $(M_1 M_2 M_3)$  ?
- Démontrer que la droite  $(M_1 M_2)$  est perpendiculaire à l'axe  $(Ox)$ .