



Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE
DU BUDGET, DES COMPTES PUBLICS
ET DE LA FONCTION PUBLIQUE

CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS SUPÉRIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2009

ÉPREUVE ÉCRITE n°2
du mardi 24 février 2009

MATHÉMATIQUES

(Durée : 3 heures – coefficient : 2)

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel informatique est interdit pendant cette épreuve. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

TOUTE NOTE INFÉRIEURE À 6 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE.

Cette épreuve comporte deux exercices et un problème complètement indépendants. Les candidats doivent vérifier que le sujet comporte bien quatre pages ; ils veilleront à bien numéroter les questions sur la copie.

L'usage d'une calculatrice ou de tout matériel informatique est interdit lors de cette épreuve.

Épreuve de Mathématiques

Exercice 1

Dans cet exercice, le terme de «plan complexe» désigne un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) dans lequel un point M de coordonnées (x, y) est repéré par son **affiche**, qui est le nombre complexe $z = x + iy$.

Pour tout nombre complexe z , on pose

$$f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i.$$

1.

1.1 Pour $y \in \mathbb{R}$, expliciter $f(iy)$.

1.2 Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution, notée a , qui est un imaginaire pur. Expliciter a .

2. Démontrer qu'il existe une factorisation de f du type

$$f(z) = (z - a)(z^2 + pz + q)$$

où p et q sont deux nombres réels que l'on précisera.

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

4. Dans le plan complexe, on note A , B et C les trois points dont les affixes sont les solutions de l'équation $f(z) = 0$.

4.1 Faire une représentation graphique.

4.2 Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier par le calcul. ■

Exercice 2

Soit a un réel. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{a}{x^3 - 1}$$

et on note \mathcal{C}_a sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Préliminaires

- 1.1 Déterminer le domaine de définition, noté $\mathcal{D}f$, de la fonction f .
- 1.2 Justifier que la fonction f est de classe C^∞ , c'est-à-dire continue sur $\mathcal{D}f$.

2. Limites

- 2.1 Déterminer les limites de f , si elles existent, en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2.2 Déterminer les limites de f à gauche et à droite en -1 .
- 2.3 Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1 . On pourra distinguer les cas selon que $a < \frac{3}{2}$, $a = \frac{3}{2}$ ou $a > \frac{3}{2}$.
- 2.4 Déduire des questions précédentes l'existence éventuelle d'asymptotes à la courbe \mathcal{C}_a , asymptotes dont on précisera les équations cartésiennes.

3. Variations. On suppose dans cette question que $a = \frac{3}{2}$.

- 3.1 Simplifier l'expression de la fonction f . Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée f' .
- 3.2 En déduire le tableau de variations de f , sur lequel on fera figurer les limites déterminées précédemment.
- 3.3 Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_{3/2}$. On fera figurer sur le graphique les asymptotes éventuelles, ainsi que les tangentes aux points remarquables.
- 3.4 À l'aide de cette représentation graphique, indiquer (en fonction de m) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ où m est un réel fixé.

4. Intégration. Dans cette question, on suppose toujours que $a = \frac{3}{2}$.

- 4.1 Démontrer qu'il existe des réels α, β, γ , que l'on déterminera, tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}f$,

$$f(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + x + 1}.$$

- 4.2 En déduire une primitive F de la fonction f .
- 4.3 Calculer l'aire de la portion du plan située sous la courbe $\mathcal{C}_{3/2}$, au-dessus de l'axe des abscisses, à droite de l'axe des ordonnées et à gauche de la droite d'équation $x = 1$. ■

Problème

Étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et un entier naturel n , on pose

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

et, pour tout entier naturel non nul n ,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

1. Préliminaire. Pour tout entier relatif $m \in \mathbb{Z}$, calculer les intégrales

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt \quad \text{et} \quad J_m = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) dt$$

(on prendra bien garde à distinguer le cas $m = 0$ des autres).

2. Quelques exemples. Dans cette question, on considère les fonctions φ , g et h définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = 1, \quad g(t) = t \quad \text{et} \quad h(t) = \cos t.$$

Pour les besoins des calculs, on pourra user des résultats des questions 3.1 et 3.2 ci-dessous.

2.1 Calculer $a_0(\varphi)$, $a_0(g)$ et $a_0(h)$.

2.2 Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $a_n(\varphi)$, $a_n(g)$ et $a_n(h)$.

2.3 Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $b_n(\varphi)$, $b_n(g)$ et $b_n(h)$.

3. Influence de la parité

3.1 À l'aide du changement de variable $x = -t$, démontrer que, si f est une fonction **paire**, alors on a

$$b_n(f) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

De même, en décomposant l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles, montrer que, si f est paire, alors

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.2 De même, montrer que, si f est une fonction **impaire**, alors

$$a_n(f) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Les suites $\{a_n(f)\}$ et $\{b_n(f)\}$.

4.1 Démontrer qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |f(x)| \leq M.$$

4.2 En déduire que les suites $\{a_n(f)\}$ et $\{b_n(f)\}$ sont bornées.

5. Cas où f est C^1 . On suppose dans cette question que f est de classe C^1 , c'est-à-dire qu'elle est dérivable et que sa dérivée f' est continue.

5.1 Démontrer que, pour $n \geq 1$,

$$a_n(f) = -\frac{1}{n}b_n(f')$$
$$b_n(f) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} [f(-\pi) - f(\pi)] + \frac{1}{n}a_n(f').$$

5.2 Quelle est la limite des suites $\{a_n(f)\}$ et $\{b_n(f)\}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

6. Cas où f est C^2 . On suppose maintenant que f est de classe C^2 , que $f(\pi) = f(-\pi)$ et $f'(\pi) = f'(-\pi)$

6.1 Exprimer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de n , $a_n(f'')$ et $b_n(f'')$.

6.2 En déduire que $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont négligeables devant $\frac{1}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. ■