Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DES FINANCES
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE
DU BUDGET, DES COMPTES PUBLICS
ET DE LA FONCTION PUBLIQUE

CONCOURS EXTERNE
POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS SUPERIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2008

EPREUVE ECRITE n°2 du mardi 05 février 2008

MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures – coefficient : 2)

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel informatique est interdit pendant cette épreuve. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

TOUTE NOTE INFERIEURE A 6 SUR 20 EST ELIMINATOIRE.

Épreuve de Mathématiques

Cette épreuve comporte trois problèmes complètement indépendants. Les candidats doivent vérifier que le sujet comporte bien quatre pages; ils veilleront à bien numéroter les questions sur la copie.

L'usage d'une calculatrice ou de tout matériel informatique est interdit lors de cette épreuve.

Notations

Les notations suivantes sont employées dans cette épreuve :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, celui des entiers relatifs, le corps des nombres réels et celui des nombres complexes;
- si A est un événement, on note $P(A)$ sa probabilité. L'événement contraire de A sera noté $\overline{A}$;
- l'événement certain, ou univers des possibilités, est noté Ω;
- l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X, si elle existe, sera notée $E[X]$;
- si A et B sont deux points du plan ou de l'espace, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur d'origine A et d'extrémité B. Le vecteur nul est noté $\overrightarrow{0}$;
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace orienté, on note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix} + e^{2ix} + \cdots e^{nix}$$

$$\text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx).$$

1. Étude de la fonction C_2

1.1 Justifier que $C_2 : x \longmapsto C_2(x) = \cos x + \cos 2x$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, périodique et paire.

1.2 Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de C_2 dans un repère orthonormé ?

1.3 Calculer la dérivée C_2' de la fonction C_2. Démontrer qu'il existe un unique réel, noté x_2, dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que $\cos x_2 = -\frac{1}{4}$.

1.4 En déduire le tableau de variations de C_2 sur l'intervalle $[0, \pi]$. On y fera notamment figurer le sens de variation de C_2 et les valeurs remarquables de C_2 et C_2'. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de C_1 et C_2 sur $[-2\pi, 2\pi]$. On donne l'approximation $x_2 \simeq 1,8$.

1.5 Calculer la dérivée seconde C_2'' de C_2. Justifier l'existence d'un unique réel $x_3 \in]0, \pi[$ tel que $\cos x_3 = -\frac{1}{16}$. Dresser le tableau de variation de C_2'' et en déduire que la courbe représentative de C_2 admet exactement un point d'inflexion dans chacun des intervalles $[0, x_3]$ et $[x_3, \pi]$.

2. Calcul de $E_n(x)$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés.

2.1 Démontrer que $E_n(x)$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2.2 En déduire que

$$E_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{i\frac{n+1}{2}x}$$

si x n'est pas un multiple de 2π.

2.3 Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $E_n(2p\pi)$?

3. Calcul de $C_n(x)$

3.1 Pour $x \in \mathbb{R}$, quel est le lien entre e^{ix} et $\cos x$? En déduire le lien entre $C_n(x)$ et $E_n(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.

3.2 En déduire que

$$C_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

si x n'est pas un multiple de 2π.

3.3 Expliciter $C_n(\pi)$ en distinguant notamment les cas selon la parité de n.

Problème 2

Un automobiliste rencontre sur son trajet n feux tricolores (n étant un entier supérieur ou égal à 2) numérotés de 1 à n. Chacun de ces feux peut, au moment où l'automobiliste arrive, être de couleur rouge, orange ou verte. On suppose que ces n feux sont identiques et indépendants les uns des autres.

Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on considère les événements

$$R_k = \left\{\text{le } k^{\text{ème}} \text{ feu est } \textbf{rouge} \text{ au moment où l'automobiliste arrive}\right\}$$
$$O_k = \left\{\text{le } k^{\text{ème}} \text{ feu est } \textbf{orange} \text{ au moment où l'automobiliste arrive}\right\}$$
$$V_k = \left\{\text{le } k^{\text{ème}} \text{ feu est } \textbf{vert} \text{ au moment où l'automobiliste arrive}\right\}.$$

On introduit également les événements suivants :

$A = \{\text{tous les feux sont au vert}\}$ $\quad$ $C = \{\text{au moins un feu est au rouge}\}$

$B = \{\text{aucun feu n'est au vert}\}$ $\quad$ $D = \{\text{exactement un feu est au rouge}\}$

(la couleur d'un feu n'est considérée qu'au moment où l'automobiliste s'y présente).

1.

1.1 Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, que vaut la somme $P(R_k) + P(O_k) + P(V_k)$? Justifier.

1.2 On suppose dans cette question que $n = 3$. Décomposer les événements A, B, C et D à l'aide de ces événements R_k, O_k et/ou V_k (pour $k \in \{1, 2, 3\}$).

1.3 Généraliser les expressions obtenues au cas où n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

2. On appelle v la probabilité qu'un feu soit au vert au moment où arrive l'automobiliste, et r la probabilité qu'il soit au rouge. Les feux étant supposés tous identiques, les probabilités v et r sont donc les mêmes pour tous ces feux. On suppose que $0 < v < 1$ et $0 < r < 1$.

2.1 Montrer que $P(A) = v^n$. De même, exprimer les probabilités des événements B, C et D à l'aide de r, v et/ou n. On veillera à bien préciser les hypothèses utilisées.

2.2 Quelle est la limite de chacune de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini ?

3. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ème}}$ feu est orange ou rouge lorsqu'arrive l'automobiliste, et 0 si ce feu est vert. On note également X le nombre de fois que l'automobiliste doit s'arrêter au cours de son trajet, étant entendu qu'il s'arrête au $k^{\text{ème}}$ feu si (et seulement si) celui-ci est rouge ou orange.

3.1 Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_k ?

3.2 Exprimer X en fonction des X_k. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Quelle est l'espérance mathématique de X ?

Problème 3

Dans ce problème on considère un espace affine E orienté de dimension 3.

1.

1.1 Soient O, A, B, C quatre points de E. Démontrer que

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CB}.$$

1.2 En déduire que trois points A, B, C sont alignés si et seulement si il existe un point O de E tel que

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}.$$

2. Dans cette question, on considère quatre points A, B, P, Q coplanaires et distincts deux à deux.

2.1 À quelle condition, portant sur le quadrilatère $ABPQ$ (ou $ABQP$), les droites (AQ) et (BP) d'une part, (AB) et (PQ) d'autre part, sont-elles sécantes ?

On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite ; on note C le point d'intersection de (AQ) et (BP), et R le point d'intersection de (AB) et (PQ).

On appelle enfin L, M et N les milieux respectifs des segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$.

2.2 Illustrer la situation par un schéma.

2.3 Soit O un point quelconque de l'espace. Démontrer les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}\right) \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OQ}\right) \qquad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OR}\right).$$

2.4 Démontrer que

$$\overrightarrow{OL} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{0}.$$

Que peut-on en déduire sur les points L, M, N ?