Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DES FINANCES
ET DE L'INDUSTRIE

SG
Ressources humaines

MINISTÈRE DU BUDGET
DES COMPTES PUBLICS, DE LA FONCTION PUBLIQUE
ET DE LA RÉFORME DE L'ÉTAT

CONCOURS EXTERNE
POUR LE RECRUTEMENT
DE TECHNICIENS SUPÉRIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2011

❖❖❖

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ DU 22 FÉVRIER 2011

❖❖❖

MATHÉMATIQUES

❖❖❖

(Durée : 3 heures - Coefficient : 2)

❖❖❖

L'USAGE DE CALCULATRICES, DE RÈGLES À CALCUL, DE TABLES DE LOGARITHMES ET DE TOUT DOCUMENT AUTRE QUE CEUX DISTRIBUÉS PAR LES SURVEILLANTS EST STRICTEMENT INTERDIT.

REMARQUES IMPORTANTES :

- les copies doivent être rigoureusement anonymes et ne comporter aucun signe distinctif ni signature, même fictive, sous peine de nullité.
- le candidat s'assurera, à l'aide de la pagination, qu'il détient un sujet complet.

TOUTE NOTE INFÉRIEURE À 6 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE

Premier problème

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan $((O,\vec{i},\vec{j})$ unité 4 cm.

1°/ Calculer $f(0)$. Comparer, pour tout x réel, $f(-x)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?

2°/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Déterminer alors les équations des asymptotes de $(\mathcal{C})$.

3°/ Etudier les variations de f sur $]-\infty, +\infty[$.

4°/ Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = 0$.

5°/ Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $\mathcal{T}$.

6°/ Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente $\mathcal{T}$.

7°/ Soit m un réel fixé. Déterminer, suivant les valeurs de m, les solutions de l'équation $f(x) = m$.

8°/ Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y = 0$ et $x = \ln 2$.

On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes:

$$e \approx 2,7 \quad ; \quad \frac{e-1}{e+1} \approx 0,5 \quad ; \quad \ln 2 \approx 0,7 \quad ; \quad \ln 3 \approx 1,1$$

Deuxième problème

Une agence de voyage propose à ses clients les deux formules suivantes:

- la formule "hôtel" notée $\mathcal{H}$ (le forfait comprend le transport et l'hébergement).
- la formule "club" notée $\mathcal{C}$ (le forfait comprend le transport, la pension et l'animation).

Une étude a montré que :

- 30% des clients de l'agence choisissent la formule $\mathcal{H}$ et 70% la formule $\mathcal{C}$.
- Parmi les clients ayant choisi la formule $\mathcal{H}$, 80% effectuent leur voyage en France et 20% à l'étranger.
- Parmi les clients ayant choisi la formule $\mathcal{C}$, 40% effectuent leur voyage en France et 60% à l'étranger.

Les clients choisissent leurs voyages indépendamment les uns des autres.
Un client se présente à l'agence.
On appelle C l'événement " le client choisit la formule $\mathcal{C}$ ".
On appelle H l'événement " le client choisit la formule $\mathcal{H}$ ".
On appelle E l'événement " le client voyage à l'étranger ".

1°/ a) Calculer la probabilité que le client choisisse un voyage à l'étranger en formule $\mathcal{C}$.

b) Calculer la probabilité qu'il choisisse un voyage à l'étranger.

c) Le client demande un voyage à l'étranger. Calculer la probabilité qu'il choisisse la formule $\mathcal{C}$.

2°/ Deux clients se présentent à l'agence. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) Un seul choisit la formule $\mathcal{C}$ et un seul un voyage à l'étranger.

b) Au moins un des deux choisit un voyage à l'étranger en formule $\mathcal{C}$.

Troisième problème

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexe. On rappelle que $i^2 = -1$.

1° / Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + \sqrt{3}\,z + 1 = 0$.

2°/ Soient z_1 et z_1 les solutions, z_1 étant la solution dont la partie imaginaire est positive. Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2.Calculer $z_1^{\ 3}$ et $z_2^{\ 3}$.

Si $z = x + iy$, on dit que le point M a pour affixe z si M a pour coordonnées (x , y) relativement à un repère orthonormé $\mathcal{R}$ du plan (unités 4 cm sur (Ox) et (Oy)).

3° / Soit A le point d'affixe i . Soient M_1, M_2, les points d'affixes respectives z_1 , z_2 .

a) Construire les points A, M_1 et M_2 dans le repère $\mathcal{R}$.
b) Montrer que les trois points A, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle dont on donnera le centre et le rayon

4°/ Calculer le module de $z_1 - i$. En déduire la nature du triangle OAM_1.

5°/ Quelle est la nature du quadrilatère OAM_1M_2 ?

On pourra utiliser la valeur approchée suivante: $\sqrt{3} \approx 1,73$