



MINISTÈRE  
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE  
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE DU BUDGET, DES COMPTES  
PUBLICS, DE LA FONCTION PUBLIQUE  
ET DE LA RÉFORME DE L'ÉTAT

**CONCOURS INTERNE  
POUR L'ACCÈS AU CORPS  
DES INGÉNIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES**

*SESSION 2009*

\*\*\*

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2 DU 2 SEPTEMBRE 2009

\*\*\*

*COMPOSITION  
DE MATHÉMATIQUES*

L'usage d'une calculatrice de poche est autorisé (standard, programmable ou alphanumérique) à condition qu'elle soit autonome et qu'elle ne comporte pas de dispositif d'impression, ni de dispositif externe de stockage d'information (cassettes, bandes magnétiques, etc...).

Les notices de fonctionnement ne sont pas autorisées.

\*\*\*

Durée : 4 heures - Coefficient : 1

TOUTE NOTE ÉGALE OU INFÉRIEURE À 10 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE

# Épreuve de Mathématiques

Les quatre problèmes sont indépendants ; on veillera à bien numéroter les questions sur la copie.

## Problème 1

On considère l'équation différentielle (d'inconnue  $y$  et de variable  $x$ ) suivante

$$(E) \quad y' = \tan x \tan y$$

dans laquelle on restreint les valeurs de  $x$  à l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .

### 1. Étude préliminaire

1.1 De quel type d'équation s'agit-il ? Déterminer toutes les solutions constantes de (E).

1.2 En déduire que les solutions non constantes  $y$  de (E) (sur un intervalle noté  $I$ ) sont telles qu'il existe un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\forall x \in I, \quad y(x) \in ]k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2} [.$$

Dans la suite du problème, on se propose de rechercher les solutions maximales non constantes de (E). Soit  $y$  une telle solution sur un intervalle  $I$  et  $k \in \mathbb{Z}$  comme dans la question 1.2.

### 2. 1<sup>ère</sup> étape de résolution

2.1 Déterminer les primitives des fonctions

$$f : t \mapsto \tan t \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \frac{1}{\tan t}.$$

2.2 En déduire qu'il existe une constante réelle  $C$  strictement positive telle que

$$\forall x \in I, \quad |\sin y(x)| = \frac{C}{\cos x}.$$

Justifier que l'on peut écrire que l'on a

$$\forall x \in I, \quad \sin y(x) = \frac{C}{\cos x} \tag{1}$$

ou bien

$$\forall x \in I, \quad \sin y(x) = -\frac{C}{\cos x}. \tag{2}$$

2.3 À quelle condition sur  $C$  les égalités (1) et (2) sont-elles possibles pour certaines valeurs de  $x$  ? Quelles sont ces valeurs ?

3. On suppose ici que  $k = 0$ , c'est-à-dire que  $y$  prend ses valeurs dans  $]0, \frac{\pi}{2} [$ . À l'aide des relations obtenues à la question 2.2, expliciter  $y(x)$  en fonction de  $x$  en précisant l'intervalle maximal.

4. Même question pour  $k = -1$ .

## Problème 2

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$ . On rappelle que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n^2$ . La trace d'une matrice carrée  $M$ , notée  $\text{tr } M$  désigne la somme des coefficients de la diagonale principale de  $M$ .

1. Démontrer que l'application  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall M, N \in E, \quad \langle M | N \rangle = \text{tr}({}^t M N)$$

est un produit scalaire sur  $E$ . Dans toute la suite du problème  $E$  est muni de ce produit scalaire.

2. Que peut-on dire de l'application «trace»

$$\begin{array}{ccc} \text{tr} : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} & \longmapsto & \sum_{i=1}^n m_{i,i} \quad ? \end{array}$$

En déduire que l'ensemble  $F$  des matrices de trace nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

3. On considère

$$G = \mathbb{R}I = \{\alpha I, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux.

4.

4.1 Donner une base orthonormée de  $G$ .

4.2 Soit  $M$  une matrice de  $E$ . Donner l'expression du projeté orthogonal  $p_G(M)$  de  $M$  sur  $G$ .

4.3 En déduire l'expression de  $p_F(M)$ , projeté orthogonal de  $M$  sur  $F$ .

4.4 En appliquant le théorème de Pythagore, trouver toutes les matrices  $M$  telles que

$$\text{tr}({}^t M M) = \frac{(\text{tr } M)^2}{n}.$$

5. On suppose que  $n = 2$ . Donner une base orthonormée de  $F$ .

## Problème 3

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  (sauf indication contraire, toutes les matrices carrées considérées sont réelles et de taille  $n$ , et tous les vecteurs-colonnes sont à  $n$  lignes).

L'objet de ce problème est la caractérisation des matrices définies positives. Les trois questions sont indépendantes.

### Définition

Une matrice carrée  $M$  de taille  $n$  est dite **définie positive** (resp. **positive**) si la forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^n$  admettant  $M$  pour matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est définie positive (resp. positive).

C'est alors le cas de toute forme bilinéaire admettant  $M$  pour matrice dans une base quelconque.

On rappelle également que la forme bilinéaire sur un espace vectoriel  $E$ , rapporté à une base  $\mathcal{B}$ , admettant  $M$  pour matrice est définie par

$$b(x, y) = {}^t X M Y$$

$X$  et  $Y$  désignant les vecteurs-colonnes de coordonnées des vecteurs  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}$ .

L'espace des vecteurs-colonnes est muni du produit scalaire canonique, dont l'expression est  $\langle X | Y \rangle = {}^t X Y$ .

1. Soit  $P$  une matrice carrée.

1.1 Démontrer que la matrice  $M = {}^tPP$  est symétrique et positive.

1.2 Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la matrice  $P$ , pour que  ${}^tPP$  soit définie positive.

**2. Réciproque.** Soient  $M$  une matrice définie positive,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Soit enfin  $b$  la forme bilinéaire admettant  $A$  pour matrice dans la base  $\mathcal{B}$ .

2.1 Démontrer qu'il existe un unique couple de matrices  $(S, A)$  dont la somme vaut  $M$ ,  $S$  étant symétrique ( ${}^tS = S$ ) et  $A$  antisymétrique (c'est-à-dire que  ${}^tA = -A$ ). Autrement dit, montrer que les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On dit que  $S$  est la **partie symétrique** de  $M$  et que  $A$  est la **partie antisymétrique** de  $M$ .

2.2 Que peut-on dire de la forme quadratique définie sur  $E$  par une matrice antisymétrique? En déduire qu'une matrice est positive (resp. définie positive) si et seulement si sa partie symétrique l'est.

2.3 Que peut-on dire de la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie sur  $E$  par la matrice  $S$  (dans la base  $\mathcal{B}$ )? En déduire qu'il existe une base  $\mathcal{B}'$  dans laquelle la matrice de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est l'identité.

2.4 Déduire des questions précédentes qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $S = {}^tPP$ . En déduire la forme générale de toutes les matrices définies positives.

**3. Cas de la dimension 2.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels  $r$ ,  $s$  et  $t$  pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

soit définie positive.

## Problème 4

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière réelle dont on note  $R$  le rayon de convergence, supposé non nul. On note  $f$  la fonction somme de cette série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Soit  $P$  un polynôme réel de degré  $d \geq 1$ . L'objet d'étude de ce problème est la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n P(n) x^n$ .

### 1. Cas particuliers

1.1 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} n x^n$ .

1.2 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ . On pourra remarquer que  $n^2 = n(n-1) + n$ .

**2. Rayon de convergence.** L'objet de cette question est de démontrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n P(n) x^n$  est encore égal à  $R$ .

2.1 Démontrer ce fait lorsque la règle de d'Alembert est applicable.

2.2 On se place en toute généralité et on note, provisoirement,  $\rho$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n P(n) x^n$ . Soit  $x$  un nombre réel (ou complexe) tel que  $|x| < \rho$ . Quelle est la limite de la suite  $(a_n x^n)$ ? En déduire une première inégalité portant sur  $R$  et  $\rho$ .

2.3 Réciproquement, soient  $x \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|x| < R$  et  $r$  tel que  $|x| < r < R$ . En écrivant

$$a_n P(n) x^n = (a_n r^n) \left( \frac{P(n)}{r^n} x^n \right),$$

démontrer que  $|x| \leq \rho$  et en déduire une seconde inégalité sur  $R$  et  $\rho$ . Conclure.

### 3. Somme

3.1 On note  $\mathbb{R}_d[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$ . Démontrer que toute famille  $(P_0, P_1, \dots, P_d)$  de polynômes telle que

$$\forall k \in \{0, \dots, d\}, \quad \deg(P_k) = k$$

est une base de  $\mathbb{R}_d[X]$ .

3.2 Pour tout  $k \in \{0, \dots, d\}$  et tout  $x \in ]-R, R[$ , exprimer à partir de la fonction  $f$  (et ses dérivées) la somme, notée  $g(x)$ , de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^n.$$

3.3 Expliquer comment, connaissant le polynôme  $P$  et la fonction  $f$ , déterminer la somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} a_n P(n) x^n.$$

### 4. Application

4.1 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 1} (2n+1) \frac{x^n}{n}$ .

4.2 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{p \geq 1} (4p^2 + 2p + 1) \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ .

$$\sum_{p \geq 0} (4p^2 + 2p + 1) \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$