Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE
DU BUDGET, DES COMPTES PUBLICS
ET DE LA FONCTION PUBLIQUE

CONCOURS INTERNE POUR L'ACCÈS AU CORPS DES INGÉNIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

SESSION 2008

***

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2 DU 3 SEPTEMBRE 2008

***

COMPOSITION
DE MATHÉMATIQUES

***

(Durée : 4 heures - Coefficient : 1)

(TOUTE NOTE ÉGALE OU INFÉRIEURE À 10 SUR 20 EST ÉLIMINATOIRE)

Épreuve de Mathématiques

Les quatre problèmes sont indépendants ; on veillera à bien numéroter les questions sur la copie.

Problème 1

L'objet de ce problème est l'utilisation des coordonnées polaires pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

1. Étude des coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dont on convient de noter les variables x et y. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

On rappelle que φ est le C^1-difféomorphisme (*i.e.* φ est bijective et φ et φ^{-1} sont de classe C^1) correspondant au passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

On pose $g = f \circ \varphi$.

1.1 Justifier que la fonction g est de classe C^1.

1.2 Soit un point $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi]$. Exprimer la différentielle $dg_{(r,\theta)}$ à l'aide de $df_{\varphi(r,\theta)}$. En déduire une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right) A.$$

1.3 En déduire l'expression des dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

2. Équation aux dérivées partielles

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante, dans un premier temps sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (l'inconnue f étant toujours supposée de classe C^1) :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (E).$$

2.1 Montrer que si f est une fonction solution de (E) alors la fonction g définie par $g = f \circ \varphi$ est telle qu'il existe une fonction h définie sur $]-\pi, \pi]$ telle que

$$g(r,\theta) = \frac{r^2}{2} + h(\theta).$$

2.2 Montrer que la fonction h en question est de classe C^1. Que vaut $\lim_{\theta \to -\pi^+} h(\theta)$?

2.3 Réciproquement, soit h une fonction vérifiant les conditions de la question précédente. Justifier qu'il existe une unique fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi], \quad f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2}{2} + h(\theta)$$

et que cette fonction est solution de (E).

2.4 L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}^2$? Lesquelles ?

Problème 2

Soit la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1}{(1+t^2)^x}. \end{array}$$

On définit la fonction F par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$.

1. Questions préliminaires

1.1 Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1.2 Calculer les dérivées partielles premières de f.

1.3 Déterminer le domaine de définition de la fonction F.

2. Valeurs entières de F

2.1 Démontrer que pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, on a

$$F(x+1) = \frac{2x-1}{2x} F(x).$$

2.2 En déduire que, pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F(n) = \frac{2\pi\,(2n-2)!}{4^n\,[(n-1)!]^2}.$$

3. Continuité et dérivabilité de F

3.1 On fixe $t \in \mathbb{R}_+$ et on pose

$$g(x) = f(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)^x}$$

(autrement dit, g est la première application partielle associée à f). Démontrer que g est une fonction décroissante sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

3.2 En déduire que la fonction F est continue sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a > \frac{1}{2}$, puis que F est continue sur son domaine de définition.

3.3 De même, montrer que la fonction F est de classe C^1, d'abord sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a > \frac{1}{2}$, puis sur son domaine de définition tout entier et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale.

Problème 3

On considère un espace euclidien E de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et un vecteur u fixé de norme 1, dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On considère enfin l'application

$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \wedge u \end{array}$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel[1]. En notant $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, cela signifie que les coordonnées de $f(x)$ sont données par la formule classique des «déterminants extraits» :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & b \\ x_3 & c \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & a \\ x_3 & c \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & a \\ x_2 & b \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

On rappelle (mais ce n'est pas à démontrer) que pour tout $x \in E$,

(1) $f(x)$ est un vecteur orthogonal à u et à x,

(2) le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ du système de vecteurs $(x, u, f(x))$ est positif (ou nul),

(3) $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2\|u\|^2 - \langle x|u\rangle^2$,

ces trois conditions permettant de déterminer «géométriquement» $f(x)$ de manière non ambiguë.

<u>1.</u> Démontrer que f est un endomorphisme de E.

<u>2.</u> Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathcal{B}$.

<u>3. Valeurs propres de f</u>

<u>3.1</u> Quel est l'endomorphisme adjoint de f (noté f^*) ?

<u>3.2</u> Supposons que f admette une valeur propre réelle λ. En considérant un vecteur x propre de f associé à λ, montrer que $\lambda = 0$.

<u>3.3</u> Réciproquement, démontrer que 0 est effectivement valeur propre de f et donner un vecteur propre associé.

<u>3.4</u> L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

<u>4.</u> On pose $B = A^2$. On note $f^2 = f \circ f$.

<u>4.1</u> Sans calculer B, démontrer que B est diagonalisable et que 0 est valeur propre de B ; donner un vecteur propre associé.

<u>4.2</u> Soit v un vecteur de norme 1 orthogonal à u. Démontrer que $(u, v, f(v))$ est une base orthonormée de E. En déduire que v est vecteur propre de f^2 pour la valeur propre -1.

<u>4.3</u> En déduire une matrice diagonale D semblable à B ainsi qu'une base orthonormée formée de vecteurs propres pour B.

<u>4.4</u> Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A vue comme matrice complexe ?

Problème 4

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$$

1. relativement à l'orientation de E fournie par le choix de la base $\mathcal{B}$ en tant que base «directe»

1. De quel type d'équation s'agit-il ? Quelle est la structure de l'ensemble des solutions sur chaque intervalle fondamental ?

2. Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, somme de la série entière $\sum a_n x^n$ dont on suppose le rayon de convergence R strictement positif.

2.1 Démontrer que y est solution de (E) sur son intervalle ouvert de convergence si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 3, \quad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n-1)(n-2)}. \end{cases}$$

2.2 En déduire l'expression des coefficents a_n en fonction de n (on pourra distinguer les cas selon la parité de n). Quel est le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue ?

2.3 En déduire l'expression des solutions de (E) développables en série entière à l'aide de fonctions usuelles (sans symbole de sommation).

3. En déduire toutes les solutions de (E).