MINISTERE DE L'ECONOMIE, DES FINANCES ET DE L'INDUSTRIE

* * * * * *

CONCOURS INTERNE POUR L'ACCES AU CORPS DES INGENIEURS DE L'INDUSTRIE ET DES MINES

* * * * * *

Epreuve écrite d'admissibilité n° 2 du mercredi 23 mai 2007

* * * * * *

COMPOSITION SUR UN SUJET DE MATHEMATIQUES

* * * * * *

(DUREE : 4 HEURES – COEFFICIENT 1)

(TOUTE NOTE INFERIEURE A **10** SUR **20** EST ELIMINATOIRE)

Épreuve de Mathématiques

Les quatre problèmes sont indépendants ; on veillera à bien numéroter les questions sur la copie.

Problème 1

On considère l'équation différentielle scalaire suivante

$$x(x-1)\,y' + y = x + 2 \qquad (E).$$

1.

1.1 De quel type d'équation s'agit-il ? Quels sont ses intervalles fondamentaux ?

1.2 Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur ces intervalles.

1.3 En déduire, toujours sur ces intervalles, les solutions de (E).

2. L'équation (E) admet-elle des solutions :

2.1 sur $]-\infty, 1[$?

2.2 sur $\mathbb{R}_+^*$?

3. Exprimer, en fonction du réel λ, l'unique solution maximale y_λ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (E) \\ y(2) = \lambda. \end{cases}$$

Problème 2

On considère les fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \end{array} \qquad F : \; x \longmapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

1. Domaine de définition

1.1 Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.2 Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ puis en 0.

1.3 En déduire que F est définie sur $\mathbb{R}$.

1.4 Montrer que $F(0) = 0$.

2. Continuité

2.1 Soient a, b deux réels tels que $a < b$; on considère la fonction $\varphi_{a,b}$ définie par

$$\varphi_{a,b}(t) = \sup\{|f(a,t)|\,,\,|f(b,t)|\}.$$

Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a,b], \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t).$$

2.2 En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Dérivabilité

3.1 Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ en tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3.2 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a,b], \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{(1+t^2)(a^2+t^2)}.$$

3.3 En déduire que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

4. Calcul

4.1 Décomposer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ en éléments simples selon la variable t.

4.2 En déduire une expression simplifiée de F' sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.3 En déduire une expression simplifiée de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.4 Tracer l'allure de la courbe représentative de F sur $[-2,2]$.

Problème 3

Soient les matrices réelles suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Réduction de A

1.1 Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser, en précisant la relation de diagonalisation, la matrice diagonale D_1 et la matrice de passage orthogonale P_1.

1.2 Expliciter une matrice diagonale D_2 telle que $D_2^2 = D_1$.

1.3 En déduire qu'il existe une matrice 3×3 inversible P_2 que l'on explicitera, d'abord en fonction de D_2 et P_1 puis en calculant ses coefficients, telle que

$$A = {}^tP_2\, P_2.$$

2. Factorisation de simultanée de A et de B

2.1 Expliciter la matrice $B_1 = ({}^tP_2)^{-1}\, B\, P_2^{-1}$ en fonction des matrices D_2, P_1 et B.

2.2 En déduire que B_1 est diagonalisable et que la matrice de passage, notée P_3, peut être choisie orthogonale. Expliciter la relation existant entre les matrices B_1, P_3 et la matrice diagonale ainsi obtenue et notée D_3.

2.3 En déduire l'existence d'une matrice P inversible, que l'on explicitera en fonction de P_2 et P_3, telle que

$$A = {}^tPP \qquad \text{et} \qquad B = {}^tPD_3P.$$

3. Calculer une matrice diagonale D_3 vérifiant la condition précédente.

Problème 4

L'objet de ce problème est de démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \zeta(2). \tag{$\bigstar$}$$

On rappelle que la fonction ζ est définie par $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

On pose $S(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

1. Quels sont les domaines de définition des fonctions S et ζ (considérées comme fonctions d'une variable réelle) ?

2. Justifier, en précisant les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est valable, que l'on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad \text{avec} \qquad u_n(x) = -x^n \ln x.$$

3. Démontrer l'égalité ($\bigstar$) demandée.

4. La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle normalement convergente sur $]0,1[$?