

Épreuve de Mathématiques

Les quatre problèmes sont indépendants; on veillera à bien numéroter les questions sur la copie.

Problème 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2. \quad (E)$$

1. Étude préliminaire

1.1 Caractériser cette équation. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur chacun des intervalles fondamentaux ?

1.2 Soit y_1 une solution de (E) sur un intervalle I_1 . Démontrer que la fonction y_2 définie par $y_2(x) = y_1(-x)$ est solution de (E) sur un intervalle I_2 que l'on précisera.

1.3 Est-il juste de dire que toute solution maximale de (E) est paire ?

2. Résolution

2.1 Résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E) .

2.2 Déterminer toutes les solutions de (E) sur ses intervalles fondamentaux.

3. Raccordement

3.1 Déterminer toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* . En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}^* .

3.2 Déterminer toutes les solutions de (E) sur l'intervalle $] - 1, 1[$. Sont-elles toutes paires ?

3.3 Finalement, quelles sont les solutions de (E) sur \mathbb{R} tout entier ?

Problème 2

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et on définit la fonction F en posant

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

1.

1.1 Montrer que la fonction F est bien définie sur \mathbb{R}_+ .

1.2 Montrer qu'elle est continue sur \mathbb{R}_+^* .

1.3 Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

2. Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simplifiée de F sur \mathbb{R}_+^* .

Problème 3

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère la matrice réelle suivante

$$A_m = \begin{pmatrix} 3m & -2m & -2m + 1 \\ 1 & 2m - 2 & -1 \\ 4m - 3 & -5m + 4 & -3m + 4 \end{pmatrix}.$$

1.

1.1 Déterminer les valeurs propres de A_m et préciser leur multiplicité.

1.2 Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible? Pour quelles valeurs de m est-elle trigonalisable?

2.

2.1 Justifier que la matrice A_0 est diagonalisable et la diagonaliser en précisant la matrice diagonale, la matrice de passage et la relation qui lie ces matrices à A_0 .

2.2 La matrice A_1 est-elle diagonalisable? La réduire en précisant la matrice réduite, la matrice de passage et la relation qui lie ces matrices à A_1 .

3. On considère le système différentiel suivant, dans lequel les inconnues sont les trois fonctions x , y et z de la même variable t :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y - z \\ y' = x - z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

3.1 Quelle est la structure de l'ensemble des solutions maximales de ce système?

3.2 Le résoudre.

Problème 4

Soient a un réel strictement positif, $I = [-a, a]$ et φ une fonction continue sur I . On suppose également qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in I, \quad |\varphi(x)| \leq C|x|.$$

On s'intéresse dans ce problème à l'équation fonctionnelle suivante, où f est une fonction inconnue continue :

$$(E) \quad \forall x \in I, \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x).$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que si une fonction f est solution de (E) sur I , alors

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^N}\right) + \sum_{n=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose $u_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2.1 Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur I .

2.2 En déduire que si f est solution de (E) , il existe une constante K réelle telle que

$$\forall x \in I, f(x) = K + \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

3. Montrer réciproquement que si f est définie par la formule précédente alors elle est continue et solution de (E) .

4. Montrer que si φ est de classe C^1 sur I et si sa dérivée est bornée, alors f est elle-même dérivable. Donner $f'(x)$ sous forme de la somme d'une série.