



MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE
DU BUDGET, DES COMPTES PUBLICS
ET DE LA FONCTION PUBLIQUE

**CONCOURS SUR TITRES ET TRAVAUX
POUR LE RECRUTEMENT
DE COMMISSAIRES CONTRÔLEURS DES ASSURANCES**



SESSION 2009



ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSION N° 2 DU 14 MAI 2009



ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES
L'USAGE DES CALCULATRICES EST INTERDIT



(Durée : 3 heures - Coefficient : 2)



Epreuve de probabilités et statistiques

Mai 2009

Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et de la présentation. Les résultats non démontrés peuvent être admis pour répondre aux questions suivantes. Le problème comporte de nombreuses questions qui peuvent être résolues indépendamment des questions précédentes.

1 Exercice

On considère une pièce équilibrée, c'est-à-dire dont la probabilité de tomber du côté pile est égale à la probabilité de tomber du côté face, qui est de $\frac{1}{2}$. Dans tout l'exercice, n est un nombre entier strictement positif.

1. On procède à n lancers successifs indépendants de la pièce.

1.1 Quelle est la probabilité que le côté pile tombe n fois ?

1.2 Quelle est la probabilité que le côté pile tombe p fois ?

1.3 Quelle est la probabilité que le côté pile tombe les p premières fois ?

1.4 On considère la variable aléatoire X qui correspond au nombre de fois où le côté pile est tombé. Calculer la moyenne et variance de X .

2. On suppose qu'on lance la pièce jusqu'à ce que le côté pile tombe. Combien de lancers y aura-t'il en moyenne ?

3. On considère n lancers successifs indépendants de la pièce. Quelle est la probabilité qu'à au moins un moment donné lors des lancers, le côté pile soit tombé autant de fois que le côté face ?

2 Problème

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi stable d'indice α ($\alpha \in]0, 2]$) si pour tout $n \geq 1$, tous réels $a_i > 0$ et toutes variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi que X , il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ a même loi que $(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} X + c_n$.

1. On rappelle qu'une variable aléatoire gaussienne $N(m, \sigma^2)$ est une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. On rappelle aussi la définition de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire Y : $\phi(q) = \mathbb{E}(e^{-qY})$ pour tout $q \geq 0$. Soit X une variable aléatoire gaussienne $N(m, \sigma^2)$.

1.1 Calculer la moyenne et la variance de X .

1.2 Montrer que X suit une loi stable dont on calculera l'indice.

1.3 Calculer la transformée de Laplace de X .

2. On considère une variable aléatoire X de transformée de Laplace $e^{-|q|^\alpha}$ ($\alpha \in]0, 2[$) et une famille $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

2.1 Montrer que X suit une loi stable.

2.2 Rappeler l'énoncé de la loi des grands nombres en précisant bien toutes les hypothèses.

2.3 Etudier la convergence en loi de $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$ pour $\alpha = 2$ puis pour $\alpha = 1$.

3. On suppose que X est une variable aléatoire qui suit une loi stable d'indice α telle que pour tous réels $a_i > 0$ et toutes variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi que X , $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ a même loi que $(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} X$. Montrer que sa transformée de Laplace est de la forme e^{-cq^α} où c est une constante dans \mathbb{R} .

4. On considère une fonction $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ croissante (au sens large) et qui tend vers 1 en $+\infty$. On définit le pseudo-inverse de G comme la fonction $G^{<-1>} : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $G^{<-1>}(x) = \inf \{t \geq 0 / G(t) > x\}$.

4.1 Soit X une variable aléatoire dans \mathbb{R}_+ et F sa fonction de répartition. Montrer que F est croissante, continue à droite et tend vers 1 en $+\infty$.

4.2 Montrer que $F^{<-1>}$ est aussi croissante et continue à droite.

4.3 Montrer que si F continue $F(F^{<-1>}(x)) = x$ pour $x \in [0, 1[$.

5. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une famille de variables indépendantes de fonction de répartition F . Soit n un entier strictement positif. On définit pour $x \in [0, 1]$ la fonction de répartition empirique $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq x}$. On classe les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ par ordre croissant et on note $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$ ce réarrangement

croissant de $(X_1, \dots, X_n) : X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$.

5.1 On suppose que F est continue. Montrer que $\sup_{x \geq 0} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ presque sûrement.

5.2 On suppose que F admet une densité f . Calculer la densité du couple $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$.

5.3 On suppose que F est continue et strictement croissante. Soit $(k(n))_{n \geq 0}$ une suite d'entiers et $p \in]0, 1[$ tels que $\frac{k(n)}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} p$. Montrer que $X_{k(n),n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} F^{<-1>}(p)$ presque sûrement.

6.

6.1 Soient $(Z_n)_{n \geq 1}$ une famille de variables aléatoires réelles, U et V deux variables aléatoires réelles non constantes (de variance strictement positive) et deux suites de réels $(a_n) \in \mathbb{R}^+$ et $(b_n) \in \mathbb{R}$ telles que $Z_n \rightarrow U$ et $\frac{Z_n - b_n}{a_n} \rightarrow V$ au sens de la convergence en loi quand $n \rightarrow \infty$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que V ait même loi que $\frac{U - b}{a}$.

6.2 Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On suppose qu'il existe deux suites $(a_n) \in \mathbb{R}^+$ et $(b_n) \in \mathbb{R}$ telles que $\frac{S_n - b_n}{a_n}$ converge en loi vers une distribution G quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que G suit une loi stable.