Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE, DE L'INDUSTRIE
ET DE L'EMPLOI

MINISTÈRE
DU BUDGET, DES COMPTES PUBLICS
ET DE LA FONCTION PUBLIQUE

CONCOURS SUR TITRES ET TRAVAUX POUR LE RECRUTEMENT DE COMMISSAIRES CONTRÔLEURS DES ASSURANCES

❖❖❖

SESSION 2008

❖❖❖

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSION N° 2 DU 20 MAI 2008

❖❖❖

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

❖❖❖

(Durée : 3 heures - Coefficient : 2)

❖❖❖

Epreuve de probabilités et statistiques

Mai 2008

Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et de la présentation. Les résultats non démontrés peuvent être admis pour répondre aux questions suivantes.

1 Exercice 1

Un troupeau T de moutons est atteint d'une épidémie d'une maladie M. Sur les 5000 moutons, 4 sont malades.

1.
1.1 Quelle est la probabilité qu'un mouton donné du troupeau soit malade ?

1.2 Quelle est la probabilité que deux moutons donnés du troupeau soient tous les deux malades ?

1.3 Quelle est la probabilité que pour deux moutons donnés du troupeau un mouton soit malade et l'autre sain ?

1.4 Quelle est la probabilité que parmi un groupe de 5 moutons du troupeau au moins un des moutons soit malade ?

1.5 Combien de moutons faut-il examiner pour avoir une probabilité supérieure à 5% de détecter au moins un cas de la maladie M ?

2. On dispose d'un test qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0,2\%$ des animaux sains testés. Quelle est la probabilité qu'un animal du troupeau T soit réellement malade lorsqu'il a un test positif ? Que penser de ce test ?

3. Deux moutons du troupeau T vont s'abreuver à un point d'eau entre 13h et 14h. Chacun des moutons choisit indépendamment de l'autre l'instant auquel il va au point d'eau. On modélise cet instant par une loi de probabilités uniforme sur [13h,14h].

3.1 Sachant qu'il faut à chaque mouton dix minutes pour boire à partir de son arrivée au point d'eau, quelle est la probabilité que les deux moutons boivent en même temps ?

3.2 Un mouton malade qui boit aux côtés d'un mouton sain le contamine. Quelle est la probabilité qu'une contamination ait lieu ?

2 Exercice 2

On considère le déplacement aléatoire d'un marcheur dans le plan. A chaque période, la personne se déplace d'une unité vers la droite et choisit avec probabilité p de se déplacer d'une unité vers le haut et avec probabilité (1-p) de se déplacer de x unité vers le bas. On représente les déplacements sur l'axe des ordonnées par une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i)_i$ telles que : $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = -x) = 1 - p$. La position de l'individu dans le plan au temps n est alors donnée par le couple (n, S_n) où la variable aléatoire S_n est définie par $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. On suppose que $x = 0$.

1.1 Calculer $P(S_n = k)$ pour tout k entier.

1.2 Calculer la moyenne et la variance de S_n.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $p = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

2. On considère deux points du plan $A(t_1, a)$ et $B(t_2, b)$.

2.1 Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur t_1, t_2, a, b pour qu'il existe une trajectoire reliant A à B.

2.2 Déterminer le nombre $N_{A,B}$ de trajectoires reliant A à B.

2.3 On note $A'(t_1, -a)$ le point symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Montrer qu'il existe autant de trajectoires reliant A à B croisant l'axe des abscisses que de trajectoires reliant A' à B.

2.4 En déduire la probabilité de rejoindre B en partant de A sans jamais rencontrer l'axe des temps.

2.5 On définit $\tau(t) = min[n|S_n > t]$ pour t positif. Montrer qu'au sens de la convergence presque sûre :

$$\frac{t}{\tau(t)} \rightarrow_{t\rightarrow\infty} 0 \tag{1}$$

3. On suppose désormais qu'un temps aléatoire sépare deux déplacements. On note T_i le temps qui sépare le $(i-1)^{eme}$ déplacement et i^{eme} déplacement. Ce temps est indépendant des directions de déplacement $(X_i)_i$. Le i^{eme} déplacement a donc lieu au temps $\sum_{k=1}^{i} T_k$. On pose $N_n = sup(i/\sum_{k=1}^{i} T_k \leq n)$. La position de l'individu au temps n est donc désormais donnée par $S_n = \sum_{i=1}^{N_n} X_i$.

3.1 On suppose que les T_i sont indépendants de loi exponentielle de paramètre λ et ont donc pour densité $f_{T_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x>0}$. Montrer que N_n suit une loi de Poisson de paramètre λn.

3.2 Calculer la moyenne et la variance de N_n.

3.3 Calculer la moyenne de S_n.

3.4 On définit la variance conditionnelle d'une variable aléatoire X par rapport à une variable aléatoire Y par :

$$Var(X|Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|Y))^2|Y] \tag{2}$$

Montrer que pour toute variable aléatoire Y :

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y)) \tag{3}$$

3.5 En déduire la variance de S_n.

3.6 Montrer que $\frac{S_n}{N_n} \to_{n\to\infty} 0$ au sens de la convergence presque sûre.

3 Exercice 3

Le théorème central limite (parfois appelé théorème de la limite centrale) montre que, sous certaines hypothèses, pour une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ d'espérance m et de variance σ^2 :

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)}{\sqrt{n}\sigma} \to N(0,1) \tag{4}$$

1. On se propose de préciser l'énoncé du théorème ci-dessus.

1.1 Donner des conditions suffisantes sur les X_i pour que le théorème ci-dessus soit vérifié.

1.2 Enoncer deux définitions équivalentes de la convergence en loi pour des variables aléatoires réelles.

2. On définit la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X comme la fonction $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{iXt})$. Le théorème de convergence de Paul Lévy montre que la convergence simple des fonctions caractéristiques est une condition suffisante pour la convergence en loi.

2.1 Montrer le théorème central limite dans l'hypothèse où les X_i suivent une loi gaussienne $N(m, \sigma^2)$.

2.2 Montrer le théorème central limite à l'aide des fonctions caractéristiques dans le cas général en procédant à un développement limité.

3. Soit n un entier positif, $a > 0$.

3.1 Montrer l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{a^p}$ pour p entier positif.

3.2 Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $\mathbb{P}(S_n > a) < \frac{K}{a^2}$.

4. Soit $M > 0$.

4.1 Calculer $lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n > a)$.

4.2 Montrer que pour x positif : $\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{x} = \int_x^\infty (1 + \frac{1}{y^2})e^{\frac{-y^2}{2}}dy$.

4.3 Donner un équivalent de $\int_M^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}dx$ pour M grand.

5. On suppose désormais que les X_i suivent une loi normale. On observe n réalisations $x_1, ..., x_n$ des $X_1, ..., X_n$.

5.1 Donner les expressions des estimateurs $\widehat{m}$ et $\widehat{\sigma^2}$ du maximum de vraisemblance de m et σ^2.

5.2 Montrer que ces deux estimateurs sont indépendants.

5.3 Calculer la fonction génératrice des moments de U^2 ou U est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. En déduire la fonction génératrice des moments de $\sum_{i=1}^n (X_i^2)$.

6. Calculer la loi de $n\frac{\widehat{\sigma^2}}{\sigma^2}$.